

LA REGLA DE COMPAÑÍA Y LA DIDÁCTICA DEL REPARTO PROPORCIONAL

JUAN NAVARRO Loidi (*)

La *Regla de Compañía* ha sido durante muchos siglos un apartado habitual en los manuales de Aritmética publicados en España. No es, ni ha sido, un problema clave en la historia de las matemáticas. Es una aplicación del reparto proporcional en la que la cantidad a repartir son los beneficios, o pérdidas, de una sociedad. Pero, es una cuestión interesante porque su evolución nos informa de los cambios que ha habido en la economía y en la enseñanza de la aritmética durante los últimos cinco siglos. Además, como recientemente se ha dejado de incluir en los libros de texto de matemáticas, este artículo puede servir también de despedida, de nota necrológica en la que se cuenta la vida y las glorias de un viejo problema que conocemos bien los que hemos dado clase en 7º de E. G. B.

NACIMIENTO

Este tipo de cuestiones aparecieron por primera vez en los textos de Aritmética a finales de la Edad Media. Los mercaderes y banqueros, que comenzaban a tener importancia como parte de la naciente burguesía, necesitaban saber cómo llevar las cuentas de sus negocios¹. Pensando en ellos se empezó a incluir en los libros de Aritmética problemas que tenían ya el enunciado clásico de la regla de la compañía. Por ejemplo, considerando sólo textos escritos en castellano, en el manuscrito *El arte del algarismo*, obra anónima fechada en 1393², la cuestión 69 dice:

"[69] Fas esta cuenta, 3 compañeros an en compañía 1 00 libras y el uno avía el medio y el otro el 1/3 y el otro el 1/4, demando ¿quántos vernán a cada uno por su derecha regla?".

Por ese comienzo clásico en estas preguntas, en el que se dice que varios socios forman una compañía se les puso a estos problemas el nombre de *regla de compañía*³.

En un comienzo los problemas sobre la adjudicación de beneficios en un negocio no se distinguían de otras cuestiones sobre reparto proporcional que se solían introducir como aplicaciones de la regla de tres. En *El arte del algarismo*, por ejemplo, no existe un apartado titulado *regla de compañía*. El problema transcrito figura en el libro entre uno sobre limosnas y otro sobre los restos que se obtienen al dividir una cantidad desconocida entre otras conocidas.

En general, los problemas sobre repartos son unas cuestiones antiquísimas que se pueden encontrar, incluso, en papiros del antiguo Egipto. Por ejemplo, en el enunciado 40 del *Papiro de Rindt* (aprox. 1650 a. de C.), se pide hallar la forma de repartir 100 hogazas de pan entre cinco personas de manera que los dos últimos sólo reciban un séptimo de lo que obtienen los tres primeros y que las cantidades que resulten vayan en progresión aritmética⁴. Para resolverlo el escriba toma cinco números que cumplen las condiciones; pero no suman 100. Luego hace una regla de tres y encuentra las soluciones correctas⁵. Sólo al final de la Edad Media la regla de compañía comenzó a figurar habitualmente entre los problemas de repartos proporcionales, a distinguirse de otras cuestiones similares y a conocerse por su nombre.

(*) Instituto de Bachillerato a Distancia de Guipúzcoa – Gipuzkoako Urrutiko Batxilergoko Institutua.

Junto a esas aritméticas aplicadas en esos siglos se estudiaban también otras que procedían de los comentarios que escribió Boecio (480-524) a los libros de Aritmética de los *Elementos* de Euclides. Esas obras no solían tratar de la regla de compañía. Estaban en latín y se utilizaban en las universidades. Además, en los siglos XII y XIII se comenzó a traducir al latín libros árabes de álgebra y, algo más tarde, varios matemáticos europeos escribieron tratados de Álgebra, dando una orientación distinta al estudio de la Aritmética. Estos textos incluían a menudo la regla de compañía, porque eran también aritméticas prácticas que ayudaron a que se dignificara dicha regla.

Algo más tarde, en el siglo XVI, se puede encontrar la regla de compañía también en algunas obras escritas en latín por profesores universitarios. Así por ejemplo en la *Ars Arithmetica* (1514) de Juan Martínez Silíceo⁶, catedrático de París y Salamanca, la "Cuestión duodécima", traducida al castellano, dice:

"Tres mercaderes se pusieron de acuerdo para hacer un negocio: el primero puso 80 escudos durante 6 meses; el segundo 70 escudos durante 5 meses; el tercero 60 escudos durante cuatro meses. Las ganancias fueron 100 escudos. Pregunta: ¿Cuánto le corresponde a cada uno en función del tiempo?"⁷.

Además en ese siglo la regla de compañía empezó a aparecer en los libros con un apartado propio, figurando separadamente como un tipo de reparto especial. Probablemente su éxito se debió más a su valor didáctico que a su supuesta utilidad práctica, porque los cálculos mercantiles, incluso en el Renacimiento, eran más complicados que una simple regla de tres.

MADUREZ

A finales del siglo XVI la regla de compañía ya estaba bien establecida. Era una de las primeras aplicaciones de la regla de tres y solía tener un apartado específico en la mayoría de los libros de Aritmética. No figuraba en los libros más eruditos, que habitualmente eran traducciones o comentarios en latín de los libros VII, VIII y IX de los *Elementos* de Euclides, o de la *Aritmética* de Diofanto de Alejandría. Tampoco se incluía en los libros de cuentas para maestros, que se utilizaban para enseñar los rudimentos de la numeración a los niños en las escuelas. Pero en la mayoría de los manuales de Aritmética figuraba esta regla.

Para entender la importancia que había adquirido a finales del Renacimiento conviene detenerse en la forma en la que figura en la *Arismetica practica y especulativa* (1562) de Juan Pérez de Moya⁸ (fl. 1554-1582) (fig.1).

Este libro fue la aritmética escrita en castellano más influyente del siglo XVI.

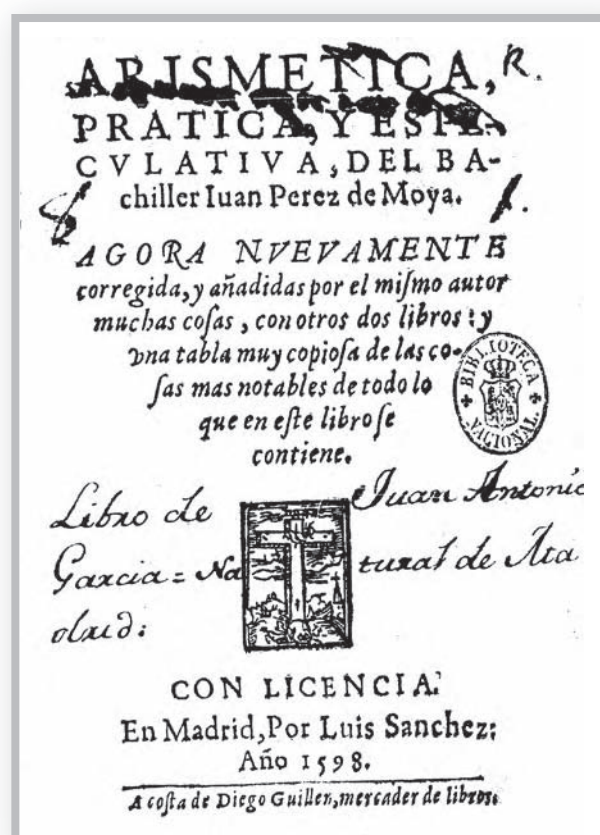


Figura 1

Tuvo más de quince reimpresiones, la última en 1798⁹. Desde el punto de vista matemático lo más interesante de la obra es la sección dedicada al "Arte Mayor" o Álgebra. Comparándolo con otros textos publicados en esa época en Europa, por ejemplo con el *Álgebra* del portugués Pedro Nunes, el libro de Moya está bastante atrasado. Pero fue muy apreciado por su claridad y pedagogía, y jugó un gran papel porque supo hacer llegar unos conocimientos básicos de Aritmética y Álgebra a mucha gente que no conocía el latín.

De los nueve libros en que se divide la *Arismetica practica y especulativa*, en el primero se explica cómo leer y escribir los números naturales y cómo efectuar las cuatro operaciones con ellos. En el libro segundo se trata de los quebrados, estudiando como compararlos, sumarlos, restarlos, multiplicarlos y dividirlos. El libro tercero es en el que se estudia las reglas de tres y de compañía. En el cuarto se ofrecen algunas nociones muy elementales de geometría. El quinto es de *arithmetica speculativa*, es decir en él se resumen los libros de Aritmética de los *Elementos* de Euclides, en la versión de Boecio, junto con algunas de sus aplicaciones, principalmente a la música. En el libro sexto se indica una serie de reglas elementales para efectuar cálculos rápidos. En el libro séptimo se estudia el Álgebra y en el libro octavo se trata de monedas y escrituras antiguas. Finalmente, en el libro noveno hay un diálogo más literario que científico entre varios estudiantes sobre la Aritmética y la Filosofía.

La regla de compañía figura en el título del libro tercero:

"Libro Tercero trata de la Regla de 3. y compañías y testamentos o partijas, y finezas de oro, y otras cosas tocantes al arte que dizen menor" [1568, f. 111.r.¹⁰].

En este libro en el capítulo primero se estudia la regla de tres y en el segundo¹¹ la regla de compañía, comenzando con la regla simple o sin tiempo. En este primer caso todos los socios tienen invertido el dinero el mismo tiempo:

"Exemplo. Dos hizieron compañía, el primero puso 9 ducados el segundo 7, ganaron 64, demandando ¿Qué viene a cada uno según lo que puso?" [1998, p. 230].

El autor propone hasta cinco modos distintos para resolver esta clase de problemas. Luego pasa a estudiar la regla de compañía compuesta o con tiempo¹². Un enunciado de este tipo propuesto por Moya es (fig.2):

"Exemplo dos hizieron compañía, el primero puso 10 ducados y 8 meses, el segundo dio 14 ducados y 12 meses, ganaron con este dinero y tiempo 744 reales, pídese ¿qué vendrá a cada uno de la ganancia según el tiempo y dinero que puso?" [1998, p. 232].

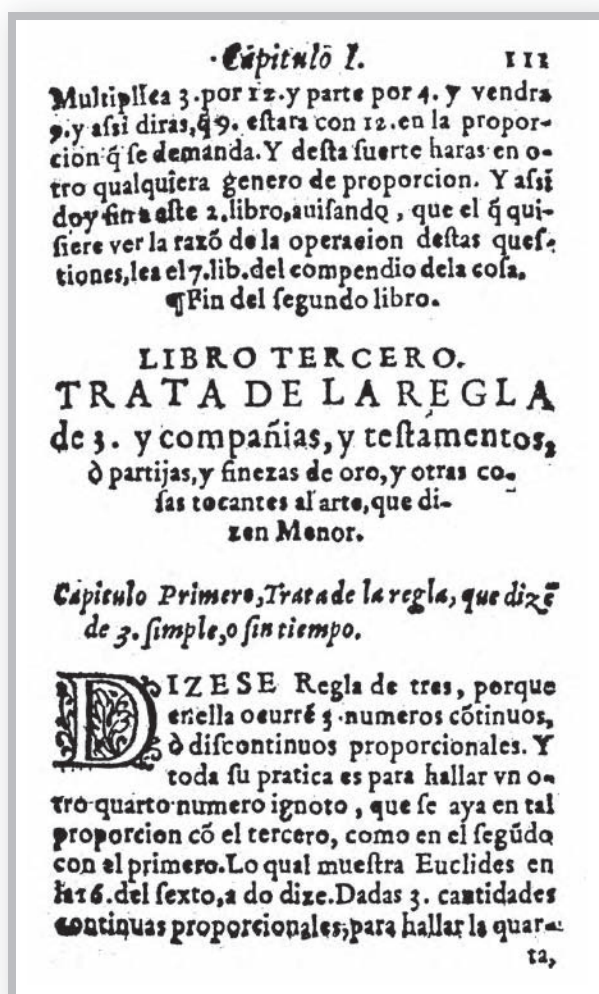


Figura 2

Para resolver este caso, Moya dice que: "has de multiplicar primero el tiempo de cada uno con su dinero, y después hazer con los productos lo mismo que heziste en la simple o sin tiempo". [1998, p. 232].

En el capítulo tercero se discute de otros casos de reparto proporcional. Son problemas muy parecidos a los de la regla de compañía. Se diferencian de ella en que la cantidad a repartir no es el beneficio de una inversión. El dinero puede provenir de la venta de una dehesa, de unas rentas eclesiásticas o de un testamento. En otros manuales de Aritmética menos voluminosos que el de Moya estas cuestiones se incluían en la regla de compañía¹³.

En los capítulos posteriores del tercer libro se estudian otras aplicaciones de la regla de tres, como las "pujas" o aumentos de un precio, el "baratar", o trueques de mercancías, los "anea-jes", o ventas de telas, las aleaciones de oro y plata, y la regla de la falsa posición, que es una forma de resolver problemas aplicando la regla de tres que ya no se usa.

Esta forma de presentar la regla de compañía de Pérez de Moya se mantuvo en lo fundamental durante varios siglos. Se planteaba justo detrás de la regla de tres, como su primera aplicación importante, considerándola una cuestión especial, diferente a otros repartos. Se dividía en dos secciones: con tiempo y sin tiempo. Al explicarla antes del Álgebra la resolución de sus problemas se hacía sin emplear notaciones simbólicas.

En otros manuales de esa época los enunciados son similares, aunque pueden variar en algún detalle. Por ejemplo Miguel Gerónimo de Santa Cruz en su Libro de Arithmetica especulativa y practica, intitulado El Dorado Contador¹⁴ (1594) propone que el negocio se haga en América:

"Tres Mercaderes embiaron ciertas mercaderias a las Indias, que les costo 4.000. ducados, en que el un mercader puso 1.600. ducados, el segundo puso 2.040. ducados y el tercero puso 360. ducados, y sucedió que perdieron en la dicha mercaderia, de tal manera, que en el retorno a España, no les vino mas que 2.500. ducados, procedidos de los 4.000. que les costo la mercaderia. Preguntase quantos ducados pertenecen a cada compañero" [1603¹⁵, f. 217 r.].

Durante esos siglos la regla de compañía se podía encontrar explicada igualmente en algunos libros para la formación de militares, marinos, arquitectos o agrimensores. En aquel tiempo era corriente que ese tipo de tratados profesionales incluyera un apartado introductorio de matemáticas. Dadas las características de esas profesiones, normalmente esas introducciones contenían más geometría que aritmética. Sin embargo, en algunos libros también se explica



Figura 3

la regla de compañía. Le consagra un apartado, por ejemplo, Cristóbal de Rojas en su *Teórica y práctica de fortificación* (1598), y a finales del siglo XVII, en la obra anónima sobre el arte de la guerra *Escuela de Palas* (1693) se le dedica un capítulo¹⁶ (fig.3).

El arquitecto Lorenzo de San Nicolás también le consagra un capítulo¹⁷ en su *Arte y Uso de Arquitectura* (1633-1665). Este autor tiene de original que también incluye en su tratado una traducción al castellano¹⁸ del primer libro de Aritmética de los *Elementos* de Euclides. En los libros de Náutica o Agrimensura son más raras las citas a esta regla¹⁹.

Los enunciados que se ponen en estos textos técnicos se asemejan mucho a los de los libros de Aritmética:

"Tres de Compañía ganaron 1.000 escudos, el primero puso doscientos por el espacio de 8 meses, el segundo dio 450 por el espacio de 6 meses, y el tercero empleó 500 por el espacio de 10 meses. Se pregunta, que porción tocará a cada uno?" [Escuela de Palas, 1693, p. 20]

Pero en estos libros la forma de entender la regla de compañía solía ser más amplia que en las aritméticas, porque lo que les interesaba principalmente era poner enunciados atrayentes para la profesión que enseñaban. En la *Escuela de Palas*, por ejemplo, se incluye entre los problemas de regla de compañía la siguiente cuestión de tema militar, pero que matemáticamente es una regla de tres inversa:

"Tratando un General de levantar una obra exterior de una Plaza; cien españoles se ofrecieron en el discurso de 6 meses; 80 alemanes en el discurso de 9 meses, y 40 italianos en el discurso de 18; se pregunta en cuantos meses la levantarían todos trabajando a un tiempo mismo²⁰" [Escuela de Palas, 1693, p. 21].

Siguiendo adelante con la historia de este problema, a finales del siglo XVII y comienzos del XVIII se continuaba dando importancia a la regla de compañía en los libros dedicados al cálculo mercantil. En la *Arithmetica demostrada Theorico- Practica para lo Mathematico y Mercantil* (1699) de J. B. Corachan figura en la Parte II De la Regla de Compañías [1735, p. 273- 294] que está dividida en *Compañías simples, Compañías compuestas, Reparticiones, Arrendamientos, Testamentos y Cuestiones misceláneas*. La estudiaban también, pero de forma algo más breve, otros autores de manuales para comerciantes, como Francisco Ochoa de Samaniego en su *Arismetica Guarisma*²¹ (1664)

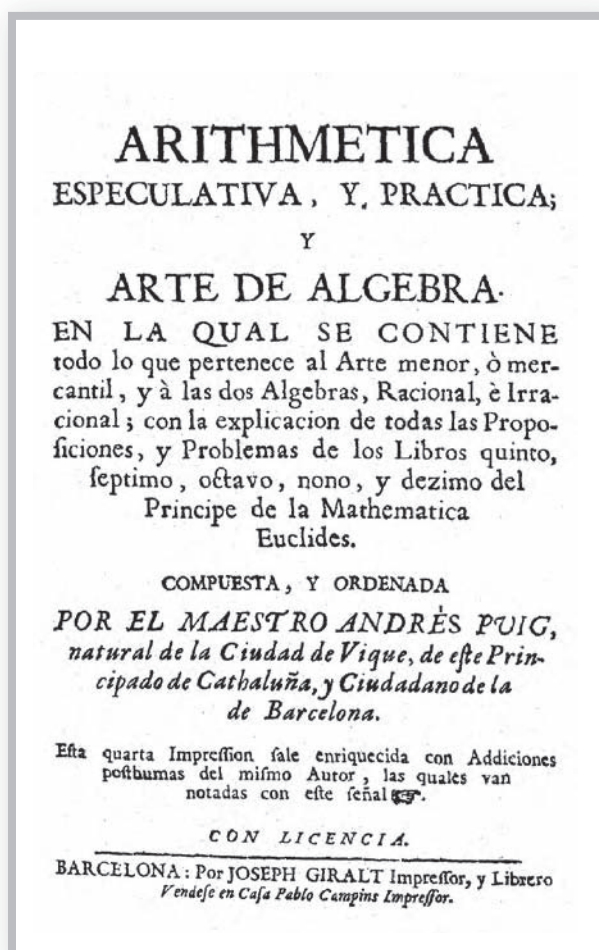


Figura 4

o el vizcaíno Manuel de Zubiaur y Eyzaga en su *Arithmetica Practica para instruir a la juventud* (1718).

En la misma época, en los libros sobre *Aritmética Especulativa y Álgebra* publicados en español también se solía mencionar la regla de compañía. En los menos innovadores se le continuaba dedicando mucho espacio. En el tratado de Andrés Puig *Arithmetica especulativa y practica, y arte de algebra*²² (1672), por ejemplo, se le dedican tres capítulos (fig. 4).

En los textos más renovadores, como la *Arithmetica Universal*²³ (1669) de José Zaragoza, se le concede menos espacio; pero comienza a notarse la importancia que va adquiriendo el álgebra. Los enunciados que se plantean son similares a los de otros autores anteriores (fig.5):

"Tres mercaderes de Compañía ganaron 100 ducados, el caudal del 1º y 2º fue 38; y del 1º y 3º 32. La ganancia del 3º 24 pidese la ganancia de los otros y el caudal de cada uno"²⁴ [ZARAGOZA, 1669, p. 376].

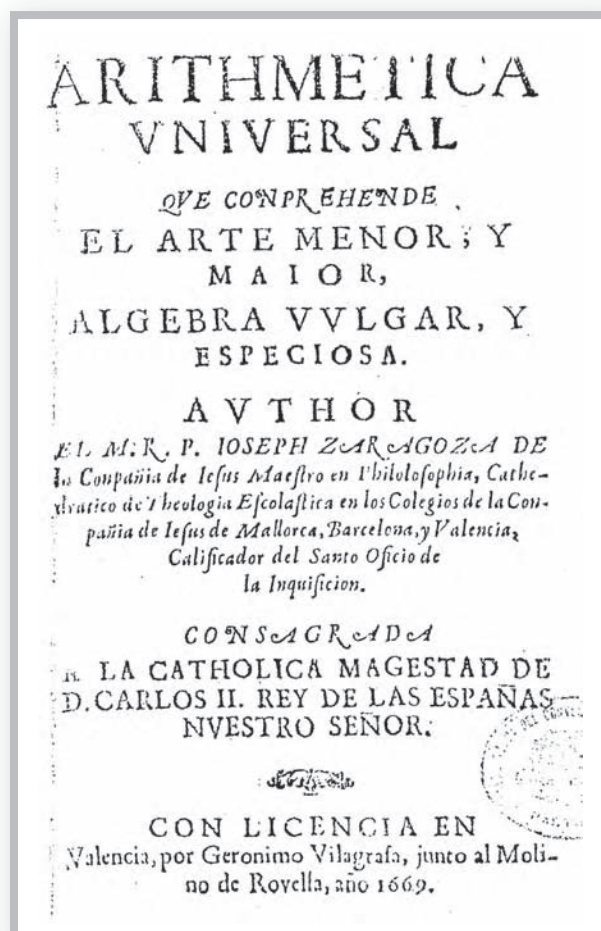


Figura 5

Pero, en la resolución de este problema, que está al final del libro, Zaragoza utiliza el Álgebra, llamando $1 \zeta^1$ a la incógnita y planteando ecuaciones. Poco más tarde, en los *Elementos Mathematicos*²⁵ (1706) del jesuita Pedro Ulloa se resuelve por primera vez en castellano un problema de la regla de compañía en general, utilizando parámetros:

"Scholio Assi se resuelven las questiones Arithmeticas que llaman de Compañías [...] Tres hicieron un contrato de compañías: el 1º puso el caudal c ; el 2º puso d ; el 3º puso e , los caudales importan b , esto es $c+d+e \propto b$. La ganancia o la perdida es a ; quanto pues se ha de repartir à el 1º? Quanto à el 2º; y quanto a él 3º?" [1706, p.76].

Otra muestra de la importancia que había adquirido el Álgebra es que a partir del siglo XVIII en los libros de Aritmética se prefiere acudir a ella para justificar la forma de resolver los problemas de la regla de compañía. Anteriormente la resolución de estas cuestiones se fundamentaba en los *Elementos* de Euclides. Así, Pérez de Moya [1598. f. 111 r.] afirma que "la justificación de la regla de tres la muestra Euclides en la 16. del sexto". Corachán [1735, p. 273] por su parte dice que el método que utiliza para hacer los repartos proporcionales se basa "en la proposición 13 del libro 5 de Euclides"²⁷.

Pese a esto la regla de compañía continuó siendo una cuestión de Aritmética elemental que se explicaba antes de introducir el Álgebra. La utilización de ecuaciones y fórmulas en los planteamientos o en las resoluciones de sus problemas fue excepcional, incluso en los siglos XIX o XX.

Durante el siglo XVIII se publicaron varios tratados amplios, verdaderas enciclopedias de matemáticas en castellano, que fueron muy utilizados en la enseñanza. En ellos se puede observar que no ha cambiado el lugar ocupado por la regla de compañía en los cursos de aritmética.

La obra más empleada durante la primera mitad del siglo XVIII fue el *Compendio Mathematico* (1707-1715) del valenciano Tomás Vicente Tosca²⁸ (fig.6).

Era un tratado que contenía mucha información, pero no estaba muy actualizado. Tosca se inspiró en el *Cursus* (1674) del jesuita francés Milliet Dechaes y pese a la fecha en que se publicó no introdujo un apartado sobre el cálculo infinitesimal de Leibniz o Newton. La obra consta de 9 volúmenes. En el primero se expone la *Geometría elemental y práctica* y la *Aritmética inferior*. En el segundo la *Aritmética superior*, el *Álgebra* y la *Música*, en el tercero la *Trigonometría*, las *Cónicas* y las *Máquinas*, en el cuarto la *Estática* y la *Hidrología*, en el siguiente la *Arquitectura*, el *Corte de piedras* y la *Artillería*, y en los últimos la *Óptica*, la *Astronomía*, la *Geografía* y la *Náutica*. Entre tanta materia la regla de compañía ocupa una humilde plaza en el apartado "Arithmetica inferior"²⁹ del *Tomo I*. Los problemas que se plantean siguen teniendo el enunciado habitual³⁰:

"Tres mercaderes pusieron a ganancia el primero 20 doblones, el segundo 18 y el tercero 12. y ganaron entre todos cien doblones. Preguntase quanto ganará cada uno?" [1757, v. I, p, 202].

La forma de resolverlos tampoco varía.

Más adelante, en la segunda mitad del siglo XVIII, la regla de compañía continuó figurando en los libros de Aritmética elemental y en los tratados de Aritmética mercantil. Se encuentra explicada, por ejemplo, en los manuales escritos por Francisco de Barreda *El arithmetico inferior especulativo y practico*³¹ (1770), Manuel Poy y Come *Elementos de aritmética numérica y literal al estilo del comercio*³² (1786) o Fermín de los Arcos *Aritmética teórica y práctica*³³ (1786).

En los grandes tratados de matemáticas en castellano de la segunda mitad del XVIII la regla de compañía sigue apareciendo como la aplicación principal de la regla de tres, aunque ocupa menos espacio que antes porque el nivel de los libros ha mejorado. En estos tratados el cálculo diferencial, o de fluxiones, ocupa una parte importante y se pasa rápidamente sobre los problemas elementales. Las matemáticas seguían creciendo y no era fácil abarcar todos los niveles en un solo libro por voluminoso que fuera. En el libro del catalán Tomas



Figura 6

Cerda *Liciones de Matematica, o Elementos Generales de Aritmética y Álgebra*³⁴ (1758) o en los *Elementos de Aritmetica Álgebra y Geometría*³⁵ (1782) del profesor de la Universidad de Salamanca Juan Justo García sólo se dedica unas hojas a la regla de compañía. Benito Bails³⁶, que fue el matemático español más influyente de la segunda mitad del siglo XVIII, tampoco le da importancia (fig.7).

En sus *Principios de Matemática de la Real Academia de San Fernando* (1776, 3 vol.) se estudia en el primer tomo la Aritmética Elemental, la Geometría Elemental y Práctica, y la Trigonometría. En el segundo el Álgebra, las Cónicas, las Funciones y el Cálculo Diferencial e Integral. En el último tomo se incluyen materias que ahora se consideran propias de la Física como la Dinámica, Hidrodinámica, Óptica y Astronomía. La regla de compañía³⁷ se introduce en el segundo tomo como un problema conocido de primer grado:

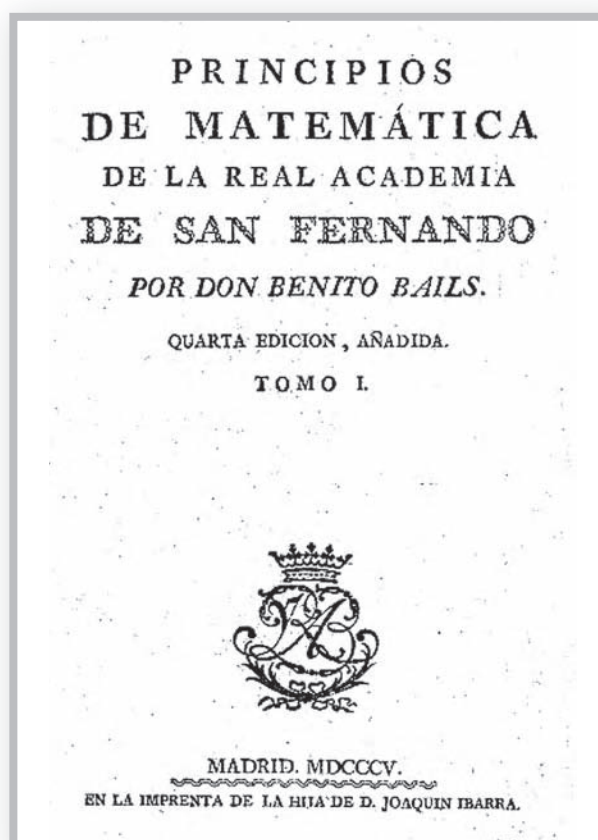


Figura 7

"118. Cuestión 4 Manifestar los fundamentos y la practica de la regla de compañía. La regla llamada de compañía sirve para averiguar la parte que toca de la perdida o la ganancia a cada uno de muchos compañeros que han juntado sus caudales para alguna especulación de comercio, a proporción de la puesta o caudal de cada uno" [1816, v. II, p. 56].

A continuación se explican un par de ejemplos de la regla de compañía simple y compuesta.

Durante el siglo XIX se fue precisando la etapa en que debía estudiarse la regla de compañía. La enseñanza secundaria se afianzó como un periodo intermedio entre la enseñanza primaria y la universidad o la formación profesional superior. En esa fase se debían estudiar unos rudimentos de aritmética, álgebra y geometría, que permitieran acceder con una buena base a las escuelas de náutica, militares o de ingenieros, o a la facultad de ciencias que se creó a mediados de siglo. La regla de compañía y los problemas de repartos eran unos temas muy apropiados para la primera etapa de estas enseñanzas medias, por eso se pueden encontrar en casi todos los manuales de matemáticas que se publicaron para ese nivel. Se encuentra explicada en libros como el *Compendio de Matemáticas puras y mixtas*³⁸ (1819) de José Mariano Vallejo, o el *Tratado de Aritmética*³⁹ (1846) de Juan Cortazar, o los *Elementos de Matemáticas Aritmética y Algebra*⁴⁰ (1856) de Acisclo Fernández Vallín, o, más tarde, en la *Aritmética*⁴¹ (1884) de I. Salinas y M. Benítez, o en los libros de Aritmética elemental de otros autores populares a finales del siglo como J. Dalmáu y Carles o A. Lasala y Martínez.

Los enunciados en el siglo XIX eran parecidos a los de los siglos anteriores. El bilbaíno Juan Cortazar⁴², por ejemplo, pregunta en su *Tratado de Aritmética*:

"5º Una persona emprende un negocio con 12.565 pesetas de capital; un mes después se le une otra persona con 20.000 pesetas; y pasado otro mes se junta a los anteriores otra persona con 15.000 pesetas; al cabo de 7 meses comenzados desde el comienzo de la operación, la sociedad ha obtenido una utilidad de 14.340 pesetas ¿Cuál es la ganancia de cada uno de los socios?" [1880, p. 168-169].

Salvo por la utilización de la peseta como unidad monetaria y que el castellano que usa es más parecido al actual, este problema podría figurar en cualquier texto del siglo XVI ó XVII.

Un libro de aritmética solía comenzar en el siglo XIX con los números naturales, dando la forma de leerlos y escribirlos. Luego se explicaban las cuatro operaciones. Se continuaba viendo los quebrados, para proseguir con los números "denominados"⁴³ y con los decimales. Finalmente se trataba de las potencias y las raíces, y de las proporciones entre números. En una segunda parte se estudiaba la regla de tres, el interés, la regla de compañía, la aligación y la regla de la falsa posición. A veces, se incluía también las progresiones u otras cuestiones. A menudo se explicaban las unidades de longitud, peso, volumen etc. del sistema tradicional castellano y sus equivalencias en los sistemas que se utilizaban en los reinos de Navarra, Aragón y Cataluña, o en Francia o Inglaterra. A partir de 1850 esta parte dedicada a las unidades de medida cambió debido a la introducción del Sistema Métrico Decimal en España. Esa innovación trajo como consecuencia que aumentara la parte dedicada a los números decimales y disminuyera la correspondiente a los números denominados o "complejos" en los manuales. Las aritméticas que se publicaron en esa época para fomentar el uso del nuevo sistema métrico también solían incluir la regla de compañía. Así lo hacen, al menos, las publicadas en el País Vasco o Navarra, como las de Irivertegui, Balzola o Bajo. El irunés Policarpo Balzola, por ejemplo, le dedica dos apartados [p. 120- 125] en su *Aritmética con la explicación del sistema métrico* (1853) (figs.8 y 9), planteando problemas similares a los de las aritméticas anteriores como:

"Ejemplo. Tres mercaderes hacen compañía, poniendo el primero 65 duros que están en el fondo común 8 meses; el segundo pone 78 que están 12 meses, y el tercero 84 duros que están 6 meses. Se han ganado 166 duros ¿a cuanto corresponde a cada uno?" [p. 124].

En la segunda parte del siglo XIX se empezaron a abrir *Escuelas de Artes*

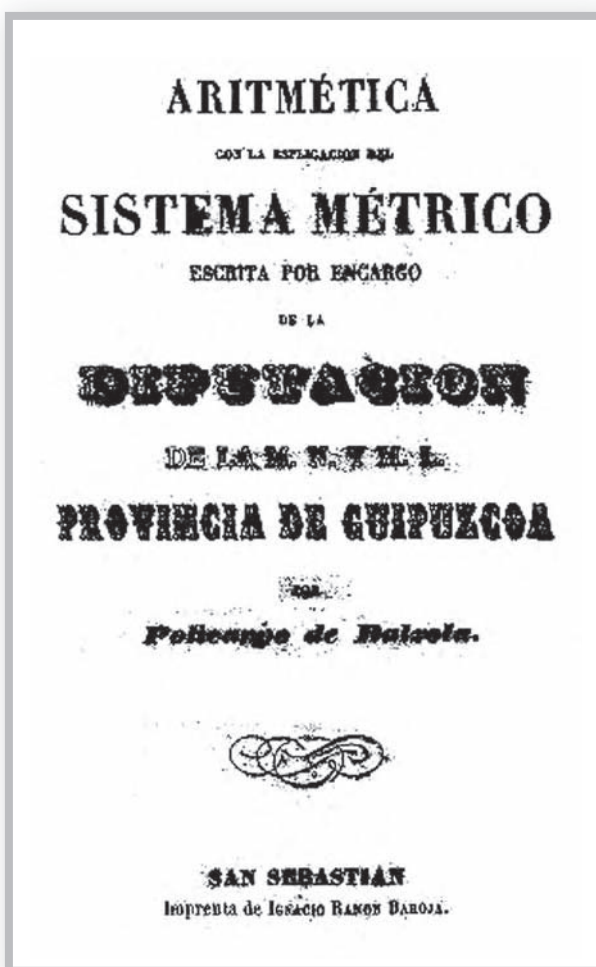


Figura 8

y *Oficios* para formar los trabajadores especializados que comenzaba a necesitar la industria. En las aritméticas que se escribieron para esas escuelas se incluía también un apartado sobre la regla de compañía. Lo hace, por ejemplo, Eugenio García en el libro *Elementos de aritmética para uso de los alumnos de las Escuelas de Artes y Oficios*⁴⁴ (1880), que publicó para utilizarlo en sus clases en la escuela que se había abierto en Donostia.

Algunos matemáticos de este siglo que escribieron libros algo más teóricos, como A. Lasala [1888] o Z. García de Galdeano [1885]⁴⁵, introducían la regla de compañía después de haber explicado el Álgebra. Gracias a eso pueden incluir en sus obras unas fórmulas generales que permiten hallar la parte que le toca a cada socio en un problema de este tipo. El navarro Zoel García de Galdeano, por ejemplo, en sus *Problemas de Aritmética y Álgebra* [Toledo, 1885, p. 44] propone las fórmulas siguientes para repartir unas ganancias entre "tres asociados":

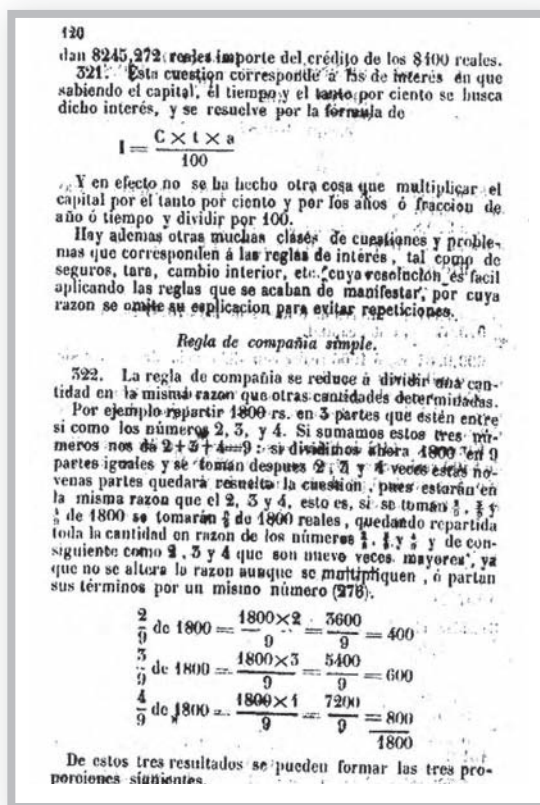


Figura 9

$$G \cdot \frac{ct}{ct + c't' + c''t''} ; G \cdot \frac{c't'}{ct + c't' + c''t''} ; G \cdot \frac{c''t''}{ct + c't' + c''t''}$$

Donde las G es la ganancia total, c los capitales y t los tiempos en los que han estado invertidos por parte de cada asociado.

Aunque en estos libros se trate este problema de una forma más abstracta, la regla de compañía no se estudia en ellos por su interés teórico, sino por ser una aplicación conocida y didácticamente interesante. No les parece, con razón, que sea un problema que merezca la pena ser profundizado. Para encontrar una explicación completa con un estudio detallado de los diversos casos que pueden haber hay que acudir al artículo titulado *Regla de Compañía* publicado por Alonso Misol [1934] en la *Revista del Centro de Estudios Científicos de San Sebastián, Matemáticas*⁴⁶.

Durante las primeras décadas del siglo XX la regla de compañía siguió cumpliendo su papel pedagógico como ejemplo de aplicación de la regla de tres. Entre las cuestiones que planteaban, por ejemplo, E. Sánchez Ramos y T. Sabrás y Causapé en su *Curso de Aritmética*⁴⁷ (1906), M. García Ardura en sus *Ejercicios y problemas de Aritmética*⁴⁸ (1918), o M. Guiu y Casanova en su *Aritmética y Álgebra*⁴⁹ (1927) se encuentran problemas de la regla de compañía con la redacción tradicional:

"Ejemplo. 3 socios han impuesto para una empresa: el primero 2.400 ptas. a 4 años, el segundo 3.500 ptas. por tres años y el tercero 12.000 ptas. por dos años. Han obtenido una ganancia de 9.000 ptas. ¿Cuánto corresponde a cada uno?" [GUIU, 1927, p. 588].

La etapa y la edad en la que se explicaba la regla de compañía se fue precisando más en el siglo XX al irse concretando los programas oficiales de las diversas asignaturas de la enseñanza secundaria. Los libros de textos dejaron de ser de *aritmética* o de *geometría* para ser los manuales de matemáticas de 1º, 2º, 3º etc. de bachillerato. En los distintos planes de enseñanza que han estado vigentes ha podido cambiar algo el curso en el que se explicaba esta regla, pero siempre se ha dado en algún curso del bachillerato elemental en el plan antiguo, o en la última etapa de la E. G. B. en los planes posteriores a la reforma de 1970.

En el siglo pasado también se exponía la regla de compañía en los primeros cursos de los estudios de comercio o de formación profesional. Por ejemplo en el *Cálculo comercial* (1941) de la editorial Bruño se le dedican⁵⁰ dos páginas, y en el texto para la formación profesional de Vicens Vives *Punto. Matemáticas primer curso. Aprendizaje industrial* (1965) se plantean algunos problemas de dicha regla con unos enunciados clásicos:

"Ejemplo. Tres socios que han aportado 1.200 ptas., 9.000 ptas. y 6.000 ptas. en un negocio durante 3, 2 y 1 año respectivamente, han obtenido una ganancias de 9.000 ptas. ¿Cómo deben repartírsela?" [p. 104].

OCASO

En la etapa posterior a la Ley General de Educación de 1970 este problema se impartía en 7º de EGB, aunque al principio, por la influencia de la llamada *Matemática Moderna* no se incluyó en algunos textos. Cuando decayó el prestigio de la matemática conjuntista, la regla de compañía volvió a ser una pregunta habitual en los manuales de matemáticas. Los enunciados tampoco cambiaron mucho en estos libros más recientes:

"Alicia inicia un negocio con 200.000 ptas. Ocho meses más tarde se le une Carmen, que aporta a la empresa 300.000 ptas. Al final del primer año obtienen una ganancia de 1.080.000 ptas. ¿Cuánto corresponde a cada una?" [GIL et al.⁵¹, 1985, p. 103].

En los enunciados del siglo XVI ó XVII no aparecían mujeres haciendo negocios, pero por lo demás esta pregunta podría pertenecer igualmente a un libro del siglo XVI o XVII.

La muerte de este viejo problema ha llegado con la implantación de la LOGSE. En el *Diseño Curricular* de las matemáticas de ESO el legislador aconseja introducir en las clases cuestiones que partan de la experiencia del alumno y casos prácticos que muestren la utilidad de las matemáticas, por lo que la regla de compañía debería haber seguido como una aplicación de los problemas de repartos proporcionales en la que se muestra de forma simplificada el funcionamiento del capitalismo. Pero, en las *estrategias generales* a utilizar no se la menciona. Como temas a proponer se indican:

"18 Identificación en la vida cotidiana del uso de la proporcionalidad entre diferentes tipos de magnitudes y de la terminología específica de alguna de ellas (intereses, mezclas, tasas, índices, ratios, etc.)"⁵².

Ni la regla de compañía, ni el reparto de beneficios y pérdidas en una sociedad aparecen como ejemplos a considerar en esta propuesta. Lógicamente, en los libros de texto de matemáticas publicados para la ESO la regla de compañía ha desaparecido casi por completo. En los manuales de segundo o tercero de la ESO siguen habiendo varios capítulos dedicados a la regla de tres y a sus aplicaciones, pero en ellos ya no se reparten beneficios entre los inversores que han expuesto sus capitales durante cierto tiempo en un negocio común. Se han consultado más de veinticinco textos oficiales⁵³ publicados durante estos últimos años y sólo en uno se explica la regla de compañía y en otro se cita como curiosidad matemática. Una cuarta parte de los libros tiene algún problema sobre repartos de dinero; pero todo parece

indicar que la regla de compañía ha desaparecido de los libros y del sistema educativo⁵⁴. Actualmente se enuncian problemas sobre los porcentajes, las escalas, el interés simple, el descuento comercial, los repartos o las mezclas. Los problemas de repartos pueden tratar del reparto de la paga semanal entre los hijos de una familia; de la distribución de lo cobrado por un trabajo entre los obreros que lo hicieron o de la división del premio de un concurso o sorteo⁵⁵. El reparto de los beneficios de una empresa entre sus accionistas no parece considerarse un ejemplo adecuado.

No se ha podido localizar ningún documento de la administración central o de alguna autonomía en el que se explique o se justifique la desaparición⁵⁶ de la regla de compañía. Aunque resulte sorprendente en una época en la que la libertad del comercio y la libre creación de empresas es la doctrina oficial en la economía mundial, todo parece indicar que la regla de compañía ha desaparecido de los libros de texto sin que nadie se sienta obligado a explicarlo. Sin embargo, este ocaso merece una explicación. Es ilógico. No corresponde a ningún cambio social que margine ese tipo de cuestiones ¿Es qué no se fundan sociedades ahora? ¿es qué ya no dan beneficios las inversiones? o ¿es qué los negocios se han alejado de la vida diaria de los alumnos?

Pese a ello, aunque no se entienda muy bien por qué ha desaparecido, hay que aceptar los hechos con espíritu científico y lamentar la muerte de un problema con tanta tradición, deseando que descanse en paz, si es que los problemas de matemáticas pueden hacerlo.

NOTAS

- (1) Sobre esta cuestión ver SALAVERT V. "Aritmética y Capitalismo" en *Historia* 16, nº 253, año XXII, p. 56 - 64. Una explicación más extensa relacionándolo con la aparición del álgebra en PARADIS J. y MALET A. (1989) *Los orígenes del álgebra: De los árabes al Renacimiento*. Ed. PPU, Barcelona
- (2) CAUNEDO del POTRO B. y CÓRDOBA de la LLAVE R. (2000) *El arte del algarismo*, Ed. Junta de Castilla y León, p. 170. El original está en la Real Colegiata de San Isidoro de León, mss. 46.
- (3) En algunos libros se utiliza el plural: "Regla de compañías". Alguna vez se le llama "Regla de sociedad", que debe venir del nombre latino "Regula societatum". Los franceses la llamaban "Règle de société". Los catalanes usan "reglas de companyas". En vasco ignoro si se le dio algún nombre particular. El diccionario de UZEI (1982) *Matematika 2 Hiztegia* no la menciona.
- (4) El texto en jeroglífico y su traducción al inglés se puede consultar en FAUVEL J., GRAY J. (1988) *The history of Mathematics. A reader*, ed. MacMillan and the Open University, p. 14. Evidentemente el enunciado que se ha puesto arriba es una versión libre de lo que plantea el escriba.
- (5) El escriba concluye que el más afortunado debía llevarse $38 \frac{1}{3}$ hogazas, los siguientes $29 \frac{1}{6}$, 20, $10 \frac{5}{6}$ panes y el que menos uno y dos tercios.
- (6) Juan Martínez Guijarro (Badajoz 1477- Toledo 1577). Conocido como Martínez Silíceo, fue profesor de las universidades de París y Salamanca. Posteriormente fue preceptor del príncipe Felipe, obispo de Cartagena y arzobispo de Toledo. Además de esta aritmética que él califica de teórico práctica, publicó un libro de aritmética práctica y varias obras de lógica.
- (7) MARTÍNEZ SILÍCEO J. *Ars Arithmetica*, traducción E. Sánchez Salor y J. Cobos Bueno [1996, p.265].
- (8) Juan Pérez de Moya (n. en Santisteban del Puerto, Jaén, ca. 1514; fl. 1554-1573). Estudió en las universidades de Alcalá y Salamanca, en las que alcanzó el grado de bachiller. Se ordenó sacerdote y en 1536 obtuvo una capellanía en su pueblo natal. Ya muy anciano fue nombrado canónigo de la catedral de Granada, donde probablemente murió. No fue profesor universitario aunque, se cree que se dedicó a la enseñanza, principalmente de las matemáticas. Publicó diversos libros de cálculo mercantil, álgebra, geometría, astronomía, geografía y náutica. Con esas obras desarrolló una importante labor de divulgación.
- (9) Por su interés histórico se ha vuelto a publicar recientemente: PÉREZ DE MOYA J. (1998) *Arismetica Practica y Especulativa. Varias historias de sanctas e ilustres mugeres*. Edición y prólogo de C. Baranda. Madrid, ed. Biblioteca Castro. El origen de esta versión moderna es la edición de Salamanca de 1562.
- (10) En la edición de 1998 p. 217. La mayoría de las citas están tomadas de la reimpresión de 1998, que no es una reedición facsímil. En las primeras ediciones las páginas están numeradas por folios.
- (11) "Capítulo II Trata de la regla de compañía que dicen simple o sin tiempo" [1998, p. 230].

- (12) "Ejemplos de la regla de compañía que dicen mixta o con tiempo" [1998, p. 232].
- (13) No era raro que en algunos libros se incluyeran como problemas de la "regla de compañía" otros problemas de repartos proporcionales. La definición para muchos autores no era tan estricta como la que se está utilizando en este artículo. Eso lo refleja el diccionario de la Real Academia Española [1992, p. 1245], que sobre la "regla de compañía" dice: "*Arit.* La que enseña a dividir una cantidad en partes proporcionales a otras cantidades conocidas. Aplicase principalmente a la distribución de ganancias o pérdidas entre los socios de una compañía comercial con arreglo a los capitales aportados por cada uno".
- (14) A la regla de compañía le dedica el Libro II, capítulos V y VI [1603, f. 213 r.-222 v.].
- (15) No era raro en esa época que los tratados de aritmética elemental se reimprimieran muchas veces, incluso después de la muerte del autor. Por eso al presentar una obra se indica la fecha de la primera edición, pero en las citas se indica la del ejemplar que se ha utilizado.
- (16) "Capítulo XIII De la Regla de Compañías" [1693, p. 19].
- (17) "Capítulo XIV Tratado de la Regla de Compañía" [1796, v. I, p. 23-24].
- (18) El libro VII, primero sobre números de los *Elementos* de Euclides, figura en el "CAPITULO LXIV. En que prosigue y empieza el séptimo libro de Euclides, traducido de latín en romance." [1796, v. II, p. 281]. Es la única versión impresa en castellano de un libro de aritmética de Euclides anterior al siglo XX. La traducción fue realizada por el profesor de matemáticas de los pajes de la corte y de la Academia de Matemáticas, Artillería y Fortificación de Madrid Juan de la Rocha, que tomó como original la versión latina de los *Elementos* (1574) del jesuita C. Clavio. La aritmética se estudió también en España en libros publicados en latín, normalmente en otros países europeos. Se escribieron algunos textos de aritmética en latín en la Península Ibérica; pero esas obras fueron muy escasas. La enseñanza culta en el siglo XVII se hacía en latín en España, pero las matemáticas estaban habitualmente ausentes en las universidades y, cuando se enseñaban en colegios o academias profesionales, se daba preferencia a la enseñanza de las matemáticas aplicadas, que solían ser en castellano.
- (19) A. Dávila y Heredia, en su *Arte de medir las tierras* (1674) la menciona en un problema de reparto proporcional diciendo: "Hazese por regla de tres o compañía" [p. 43], como si fuera una teoría que debiera ser conocida por el lector.
- (20) Según este problema en el siglo XVII los soldados españoles trabajaban más que los alemanes o italianos.
- (21) Le dedica la sección "Regla de tres con tiempo y de compañías" [1664, f. 55-72].
- (22) La regla de compañía ocupa desde el "Cap. IX Trata de la Regla de Compañías" hasta el capítulo XI [1715, p. 186-206].
- (23) Zaragoza sólo tiene algunos problemas sueltos sobre esta regla [1669, libro I, p. 60, 61 y 82; libro IV, p. 376-378].
- (24) Dice que el primero invirtió 1 ζ plantea las ecuaciones pertinentes y halla que la incógnita vale 20 y "Finalmente si el 3º con 12 gana 24 el 1º con 20 ganará 40 y el 2º con 18 ganará 36" [ZARAGOZA *Aritmética*, p. 377]
- (25) Este libro es famoso por ser el primer libro en castellano en el que se utiliza el análisis geométrico de Descartes. El P. Ulloa le dedica a la regla de compañía solamente el "Scholio" citado.
- (26) Para Ulloa " Ω " es nuestro " $=$ ".
- (27) Para justificar la regla de tres parece más apropiada la proposición 12 del libro VI, que trata de la forma de hallar el cuarto proporcional. La proposición 12 del libro V, que plantea Corachan es efectivamente la más adecuada para justificar un reparto proporcional entre varias magnitudes.
- (28) T. V. Tosca (Valencia, 1651 – Valencia 1723) fue un religioso que ejerció como profesor de la Universidad de Valencia, llegando a ser vicerrector. Publicó el *Compendio Matemático* en nueve volúmenes, que tuvo cinco ediciones los años 1707, 1727, 1757, 1760 y 1794, la última incompleta. Este religioso publicó igualmente un *Compendium Philosophicum* en 5 volúmenes, que se editó en 1721.
- (29) "Capítulo II De la Regla de Compañías" [1757, v. I, p. 201-207].
- (30) Tosca incorpora también en su apartado sobre la regla de compañía un bonito problema sobre el agua que sale de una fuente, que está tomado de Caramuel. Pero es más bien una regla de tres inversa.
- (31) Parte II "Cap. 7. De las Reglas de compañía simples o compuestas" [1770, p. 243-294].
- (32) Del punto "XXXVI De las reglas de compañía en general" al "XL Compañías de arrendamientos" [1819, v. II, p. 53-77].
- (33) "Capítulo IV Declaración de la Regla de Tres en prorratio de compañía" [1786, p. 111-119].
- (34) Tres preguntas en el Capítulo IX [1816, p. 156-161].
- (35) "Regla de Compañías" [1782, p. 140-142].
- (36) Benito Bails (Barcelona, 1730- Madrid, 1797). Estudió en las universidades de Toulouse y París. De vuelta en España, trabajó

como profesor de matemáticas en la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando de Madrid durante muchos años. Fue una persona muy apreciada por los políticos ilustrados, pero tuvo algún enfrentamiento con sectores religiosos por sus ideas científicas renovadoras.

- (37) En la edición de 1816 en el v. II, p. 56-59.
- (38) "197 Se llama regla de Compañía" [1819, v. I, p. 189-191].
- (39) "Capítulo IV Repartimientos proporcionales y regla de compañía" [1880, p. 164-169].
- (40) "Regla de Compañía" [1890, "Aritmética", p. 204-206].
- (41) "VI Regla de Compañía" [1940, p. 298-300].
- (42) Juan Cortazar (1809- 1873). Fue profesor de matemáticas en el colegio de Santiago de Bilbao de 1827 a 1834. Luego estuvo dos años estudiando en el extranjero. Al volver le nombraron catedrático de Matemáticas Elementales de la Universidad Central de Madrid, pasando posteriormente a ser catedrático de Álgebra Superior y Geometría Analítica. Escribió gran número de manuales de matemáticas para la enseñanza primaria, secundaria y universitaria, que tuvieron muchas reediciones.
- (43) Los números denominados o complejos eran los que se empleaban para dar magnitudes en las que se utilizaban para múltiplos y submúltiplos unidades que no eran divisiones decimales, como por ejemplo la moneda (reales maravedís y ducados) o la longitud (pies, palmos, leguas, etc.).
- (44) "Regla de partes proporcionales y de compañía" [1880, p.122-126].
- (45) Atanasio Lasala y Martínez, 1888, *Elementos de matemáticas. Tomo I Aritmética y Algebra* [1896, p. 186] y Zoel García de Galdeano, 1885, *Problemas de Aritmética y Álgebra con las nociones correspondientes de crítica algorítmica* [p. 44].
- (46) En ese artículo Misol distingue muchos casos. La división principal, como siempre, la hace entre la regla simple o sin tiempo ("Primer caso. Dos socios S1 y S2 acometen un negocio con capitales C1 y C2, ambos durante un tiempo igual T") y la regla compuesta o con tiempo ("Segundo caso. Dos socios S1 y S2 emprenden un negocio con capitales C1 y C2 cualquiera pero con tiempos de imposición diferentes T1 y T2"). El autor plantea también el reparto de pérdidas y explica como se pueden generalizar sin dificultad las fórmulas para compañías con más de dos socios. Discute, igualmente sobre cómo se reparten los bienes si se cierra la sociedad, o sobre cómo se dividen los beneficios si las participaciones o los tiempos de inversión de los socios están ponderados.
- (47) "V Regla de compañía" [1906, p. 199-200].
- (48) "IX Regla de Compañía" [1940, p. 119-126, 200-201, y 297-301].
- (49) "La regla de compañía, sociedad o de prorrateo" [1927, p. 588-589].
- (50) "V Regla de compañía" [1941, p.195-196, 200-202 y 463-464].
- (51) J. GIL, P. GARCÍA, J. MASCARÓ (coord. A. Ramos), 1985 *Matemáticas 7 Educación General Básica*, Ed. Santillana. Esta regla se explica en un apartado del tema 12: "7. Regla de Compañía" [p.102-103].
- (52) MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1989) *Diseño Curricular de Base, Enseñanza Secundaria obligatoria II*, Madrid, p. 504. En las versiones autonómicas consultadas la redacción es similar.
- (53) Se pueden consultar los títulos de estos libros en NAVARRO LOIDI J. (2004) "La Regla de Compañía" en: *VIII Congreso de la SEHCYT: Historia de las Ciencias y de las Técnicas* (coord. Escribano, J. J.; Español L. ; Martínez Mª A.) 2004, Logroño, ed. SEHCYT- Univ. del Ríoja. v. 1, pp. 433-451.
- (54) En Francia y en los países francófonos la evolución parece haber sido parecida. En varios libros de aritmética elemental de finales del siglo XIX o comienzos del XX que se han consultado, la "règle de société" figura entre las aplicaciones de la regla de tres. Sin embargo, en los libros actuales no aparece. COLLAUDIN P. (2002, "La règle des alliages et mélanges" en: *A.P.M.E.P. Bulletin* 439, p. 196) dice, refiriéndose a la regla de aligación, que se mantuvo en el programa francés hasta 1923, pero que luego se quitó. Probablemente la regla de compañía desapareciera del programa también por esas fechas.
- (55) Los problemas sobre el reparto proporcional del premio de un sorteo son bastante recientes. El más antiguo que se ha encontrado está en los *Principios* de B. Bails [1816, v. II, p.86] "153. Cuestión 39. Se hace una lotería de 100000 cédulas, una con números, que son las que ganan y otras en blanco que no ganan nada. La mitad de las cédulas que gana añadida a la 1/3 de las blancas componen 35000; ¿Cuántas son las cédulas que ganan?". Probablemente antes del siglo XVIII los sorteos se consideraban inadecuados para la enseñanza elemental porque fomentaban el vicio del juego.
- (56) COLLAUDIN P. (loc. cit.) dice que el gobierno francés justificó la desaparición de los problemas de mezclas a comienzos del siglo XX, diciendo que eran: "peu realistes et inutiles à l'élève". Esa razón podría valer también para la regla de compañía que solía ir junto a ellos.